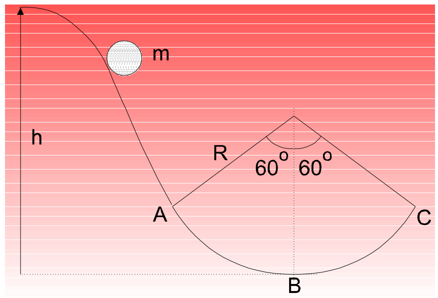
MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam**.
Op vel 1: **studentnummer, naam, adres, postkode, woonplaats** en **studierichting.**
De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

1. **De glijbaan**

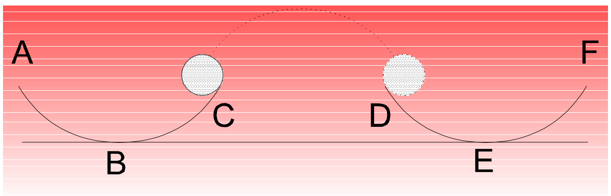
Een kogel met een massa m glijdt van een baan vanaf een hoogte h gemeten ten opzichte van het laagste punt B van de baan. Het laatste stuk ABC van de baan vormt het derde deel van een cirkel met straal R. Voor de hoogte geldt: $h = 2R$. Er is geen wrijving.



Figuur 1

a. Bereken in punt B de grootte van de normaalkracht die de baan uitoefent op de kogel, uitgedrukt in mg, waarin g de versnelling tengevolge van zwaartekracht is.

b. Bereken de grootte van de snelheid van de kogel in punt C, uitgedrukt in R.



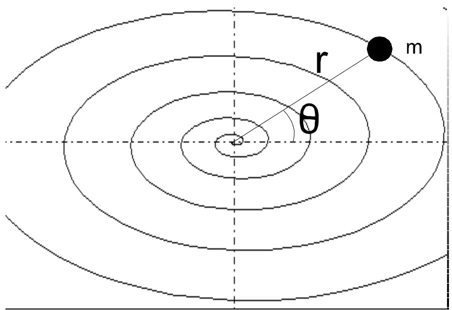
Figuur 2

Verder naar rechts wordt een cirkelvormig stuk baan DEF gelegd dat identiek is aan ABC.

c. Bereken de afstand DC opdat de kogel precies in D op het tweede stuk baan terecht komt.

2. **Een centrale kracht**

Een massa m beweegt in een spiraal. De positie ten opzichte van de oorsprong O wordt in poolcoördinaten gegeven door (r, θ) waarbij $r = k.\theta^2$. De kracht $\vec{F} = f(r).\hat{r}$ die op m werkt blijkt een centrale kracht te zijn.



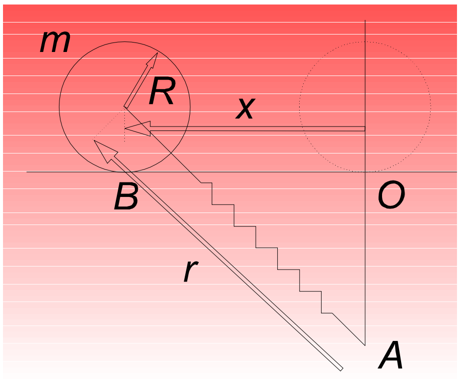
Figuur 3

a. Laat zien dat voor de hoeksnelheid $\frac{d\theta}{dt}$ geldt:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{mk^2\theta^4}$$ waarin J het impulsmoment is.

b. Bereken de grootte van de centrale kracht $f(r)$ als functie van r.

3. **De rollende cilinder**



Figuur 4

Een homogene cilinder met straal R en een massa m rolt zonder te slippen over een horizontaal vlak. De as van de cilinder is met een elastisch koord verbonden met het punt A, waardoor een kracht $F = k.r$ op de cilinder wordt uitgeoefend. Hierin is r de afstand van de as tot het punt A.

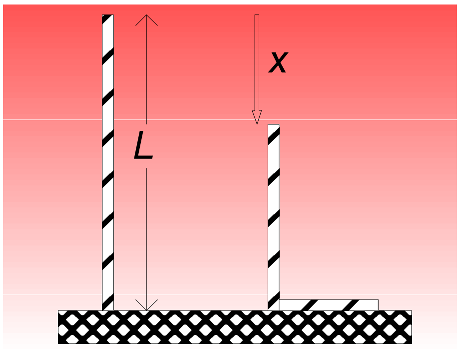
a. Bereken het krachtmoment als functie van x dat op de cilinder ten opzichte van het raakpunt B met het horizontale vlak wordt uitgeoefend.

Op het tijdstip $t = 0$ bevindt de cilinder zich op een afstand x_0 van de oorsprong O.

b. Leidt uit de bewegingsvergelijking voor de cilinder af dat voor de horizontale afstand x als functie van de tijd geldt: $x(t) = x_0 . \cos(\omega t)$.

c. Bereken de tijd t_0 die de cilinder er over doet om de afstand BO af te leggen, uitgedrukt in k en m.

4. **Het vallend touw**



Figuur 5

Een dun homogeen touw met een lengte L en een massa m hangt verticaal zodat het onderste uiteinde de grond juist raakt. Daarna wordt het touw losgelaten. De afgelegde weg van het bovenuiteinde is na t seconden x. Er is geen wrijving en men mag aannemen dat het deel van het touw dat al op de grond ligt het overblijvende deel van het touw niet hindert in z'n val. Op het touw werken de zwaartekracht en de normaalkracht N van de grond. Men mag aannemen dat ieder deel van het touw dat nog niet op de grond ligt, versneld wordt met de versnelling g ten gevolge van de zwaartekracht.

a. Geef de massa van het stuk touw dat nog niet op de grond ligt als functie van de tijd t.

b. Geef de bewegingsvergelijking voor het stuk touw dat nog niet op de grond ligt en leidt daaruit de grootte van de normaalkracht N als functie van de tijd af, die op dat deel van het touw werkt.

1a.

$$\left.\begin{array}{l} N_B = mg + mR\theta'^2 = mg + \dfrac{mv_B^2}{R} \\ \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \rightarrow mv_B^2 = 2mgh = 4mgR \end{array}\right\} \rightarrow N_B = mg + 4mg = 5mg$$

b. $$\tfrac{1}{2}mv_C^2 = mgh - mgR(1-\cos(\frac{\pi}{3})) = 2mgR - mgR(1-\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{2}mgR \rightarrow v_C = \sqrt{3gR}$$

c. In C is de vertikale snelheidscomponent:

$$v_{C,y} = v_C . \sin(\frac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,v_C \rightarrow v_y(t) = -gt + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,v_C = -gt + \tfrac{3}{2}\sqrt{gR}$$

Als de kogel in D aankomt is:

$$v_y = -v_{C,y} = -\tfrac{3}{2}\sqrt{gR} \rightarrow -gt + \tfrac{3}{2}\sqrt{gR} = -\tfrac{3}{2}\sqrt{gR} \rightarrow t = 3\sqrt{\frac{R}{g}}$$

De horizontale snelheidscomponent is: $v_h = v_C\cos(\frac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}v_C = \tfrac{1}{2}\sqrt{3gR}$

zodat $CD = v_h . t = \tfrac{1}{2}\sqrt{3gR} . 3\sqrt{\frac{R}{g}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{3} . R$

2a. versnelling in poolcoördinaten: $\vec{r}'' = (r'' - r\theta'^2)\,\hat{r} + (2r'\theta' + r\theta'')\,\hat{\theta}$

centrale kracht: $\vec{F} = f(r)\,\hat{r} \rightarrow 2r'\theta' + r\theta'' = 0$

zodat: $mr^2\theta' = J \rightarrow \theta' = \dfrac{J}{mr^2} = \dfrac{J}{mk^2} . \dfrac{1}{\theta^4}$

b. $r = k.\theta^2 \rightarrow \dot{r} = 2k\theta\theta' \rightarrow r' = \dfrac{2J}{mk} . \dfrac{1}{\theta^3}$

hieruit volgt: $r'' = -\dfrac{6J}{mk} . \dfrac{1}{\theta^4} . \theta' = -\dfrac{6J^2}{m^2k^3} . \dfrac{1}{\theta^8} = -\dfrac{6J^2k}{m^2} . \dfrac{1}{r^4}$

zodat: $f(r) = m . r'' = m(r'' - r\theta'^2) = m(-\dfrac{6J^2k}{m^2} . \dfrac{1}{r^4} - r . \dfrac{J^2}{m^2r^4}) = -\dfrac{J^2}{m}(6\dfrac{k}{r^4} + \dfrac{1}{r^3})$

3a. $N_B = krR\sin(\alpha) = krR\dfrac{x}{r} = kRx$

b. $I_B . \phi'' = N_B \rightarrow -(I_{CM} + mR^2) . \dfrac{x''}{R} = k . x . R$

met $I_{CM} = \tfrac{1}{2}mR^2$ volgt: $\ddot{x} = -\dfrac{k}{m + \frac{1}{2}m} . x = -\dfrac{2}{3}\dfrac{k}{m} . x$

De oplossing hiervan is: $x(t) = x_0\cos(\omega t)$

c. $\omega^2 = \dfrac{2}{3}\dfrac{k}{m}$ zodat $t_0 = \dfrac{T}{4} = \dfrac{2\pi}{4\omega} = \dfrac{1}{2}\pi\sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{m}{k}}$

4a. $m'(t) = m . \dfrac{L - x(t)}{L} = m(1 - \dfrac{\frac{1}{2}gt^2}{L}) = m(1 - \dfrac{g}{2L}t^2)$

b.

$$m' g - N = \frac{d}{dt}(m' \dot{x})$$

$$\left. \begin{array}{l} m' = m\left(1 - \frac{g}{2L} t^2\right) \\ \dot{x} = gt \end{array} \right\} \rightarrow \; m\left(1 - \frac{g}{2L} t^2\right) g - N = mg - m \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{g^2}{L} \cdot t^2$$

zodat: $N = \frac{m}{L} g^2 t^2$